基于旋转矩阵的点的合成运动速度和加速度定理证明

韩彦伟[*]　张子建[+,2)]
[*](河南科技大学土木建筑学院，洛阳 471023)
[+](南京航空航天大学航天学院，南京 210016)

摘要　现有教材中点的合成运动速度和加速度定理的证明都比较复杂，给课堂教学与学生学习带来较大困难。本文提出一种基以旋转变换矩阵的新的定理证明方法，以期帮助学生能更快的掌握、理解与应用速度和加速度合成定理。本文利用合成运动法和旋转变换矩阵法，建立点的绝对运动、牵连运动和相对运动的解析关系式。将该解析关系式对时间求一阶导数，得到平面运动、平行移动及定轴转动时的点的速度合成定理。进一步将解析关系式对时间求二阶导数，得到平面运动、平行移动及定轴转动时的点的加速度合成定理。本文的证明过程数学思路简明流畅、物理概念清晰明了、非常适合教学。
关键词　旋转变换矩阵法，平行移动，定轴转动，平面运动，点的速度和加速度合成运动定理

PROOF OF THEOREMS OF COMPOSITION OF VELOCITY AND ACCELERATION OF A PARTICLE BASED ON ROTATION MATRICES[1)]

Han Yanwei[*]　Zhang Zijian[+]
[*] (School of Civil Engineering and Architecture, Henan University of Science and Technology, Luoyang 471023, China)
[+](College of Astronautics, Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing 210016, China）

Abstract The proofs of the theorems of velocity and acceleration for synthetic motions of points in the existing textbooks are complicated, which bring more difficulties to classroom teaching and students' learning. This paper proposes a new theorem proof method based on the rotation transformation matrix, in order to help students to grasp, understand and apply the velocity and acceleration synthesis theorem faster. This paper utilizes the theorem of composition and the rotational transformation matrix methods to establish the analytical relationship equation of the absolute motion, transport motion and the relative motion of a particle. The theorem of composition of velocity for a point in plane motion, translation and rotation about the fixed axis are obtained by used the first order derivative of the analytic relationship equation with respect to time. Further, the acceleration synthesis theorem of particle in plane motion, translation and rotation about the fixed axis are obtained by used the second order derivative of the analytic relationship equation with respect to time. The proof process of this paper is mathematically simple and fluent, the physical concepts are clear and concise, and it is very suitable for teaching.
Key words　Rotational transformation matrix method, translation, rotation about the fixed axis, plane motion, theorem of composition of the velocity and acceleration of a particle

前言

点的合成运动定理是理论力学中的运动学的主要内容[1]。该定理为分析复杂的合成运动提供了有效而便捷的手段，是分析和求解物体运动速度和加速度的重要方法。点的合成运动包括六个要素：(1)选取物体上一点 M 动点，(2)选取固定在移动物体上的坐标系$O'x'y'z'$为动系，(3)选取固定在地面的$Oxyz$为静系，(4)动点相对于静系的运动为绝对运动，(5)动点相对于静系运动为相对运动，(6)动系$O'x'y'z'$相对于静系$Oxyz$的运动为牵连运动。文献[2-4]基于矢量法、泊松关系等，推导出了点的合成运动速度和加速度定理。

点的合成运动一直是理论力学教学中的学习难点与争论点，受到了许多学者的广泛关注。文献[5]对比并讨论广义坐标方法和牵连点运动法的特点与应用。文献[6]的从动点的绝对矢径与动系上任意一点的绝对矢径之间的关系出发，简单明了的证明点的速度和加速度合成定理。文献[7]采用弧坐标直观的描述相对运动，的推导了点的速度和加速度合成定理。文献[8]采用解析方法提出了牵连点速度和加速度的表示方法，无需引入相对导数前提下推导了点的速度和加速度合成定理。文献[9]简述了科氏力的历史并得到结论：先有的科氏惯性力，后有的加速度合成定理。文献[10]引入耦合位移概念，改进了现行教材中普遍采用的点的复合运动速度合成定理的几何法推导。文献[11]采用的牵连点跟踪法来推导速度和加速度合成定理，该方法概念明确、物理清晰、便于理解掌握。文献[12]指出伏龙科夫的理论力学教材中点的速度合成定理的推导错误，在厘清概念的基础上得到了数学上正确推导过程。文献[13]基于矩阵方法简单明了的推导出刚体上任意一点的速度和加速度合成定理。文献[14]提出一种基于复矢量-极坐标的新方法，用该方法给出牵连运动为平面运动时点的加速度合成定理。文献[15]基于矩阵变换方法，提出针对复合运动的一组快速求解公式。总上所述，学者们利用矢量法、牵连点法、几何法、跟踪法、耦合位移法等，如从各种角度探讨直观、准确、简便点的合成运动定理的证明方法。

本文以坐标变换矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为数学工具，定义了空间中动系与静系之间的矢量坐标变换解析关系式。从这个解析表达式出发，通过对解释矢量关系式一阶导数得到点的合成运动速度定理，对解释矢量关系式二阶导数得到点的合成运动加速度定理。该方法从根本上揭示了合成运动的复杂性和困难性的来源，提供一个新颖的角度来审视点的合成运动的内在本质机理。

1 绝对矢量、牵连矢量及相对矢量的关系式

如图 1 所示，建立点的合成运动的空间坐标系统。动点为 M 点，动坐标系为$O_1x_1y_1z_1$，静坐标系为$Oxyz$。绝对运动为动点相对与静系的运动，相对运动为动点相对与动系的运动，牵连运动为动系相对与静系的运动，动坐标系与静坐标系的转角为φ。则得到动点的绝对运动与相对运动的关系式为

$$\boldsymbol{r}_a = \boldsymbol{r}_e + \boldsymbol{r}_r \tag{1}$$

其中，$\boldsymbol{r}_a = \begin{pmatrix} x_a(t) & y_a(t) & z_a(t) \end{pmatrix}^T$代表对绝位移矢径，$\boldsymbol{r}_e = \begin{pmatrix} x_{O_1}(t) & y_{O_1}(t) & z_{O_1}(t) \end{pmatrix}^T$ O_1代表牵连位移矢径，$\boldsymbol{r}_r = \boldsymbol{A}\boldsymbol{r}_{r1} = \begin{pmatrix} x_r(t) & y_r(t) & z_r(t) \end{pmatrix}^T$ 代表动点 M 相对静系 $Oxyz$ 的位移矢量。矢量 $\boldsymbol{r}_{r1} = \begin{pmatrix} x_{r1}(t) & y_{r1}(t) & z_{r1}(t) \end{pmatrix}^T$ 代表动点 M 相对动系$O_1x_1y_1z_1$的位移矢径。

绝对位移矢径对时间 t 的一阶导数

$$\boldsymbol{v}_a = \frac{d\boldsymbol{r}_a}{dt} = \dot{\boldsymbol{r}}_a \tag{2}$$

为动点的绝对速度。绝对位移矢径对时间的二阶导数

$$\boldsymbol{a}_a = \frac{d^2\boldsymbol{r}_a}{dt^2} = \ddot{\boldsymbol{r}}_a \tag{3}$$

为绝对加速度。

牵连位移矢径对时间 t 的一阶导数

$$\boldsymbol{v}_{e1} = \frac{d\boldsymbol{r}_e}{dt} = \dot{\boldsymbol{r}}_e \tag{4}$$

为牵连运动为平行移动时的第一牵连速度。

牵连位移矢径对时间 t 的二阶导数

$$\boldsymbol{a}_{e1} = \frac{d^2\boldsymbol{r}_e}{dt} = \ddot{\boldsymbol{r}}_e = \dot{\boldsymbol{v}}_{e1} \tag{5}$$

为牵连运动为平行移动时的第一牵连加速度。

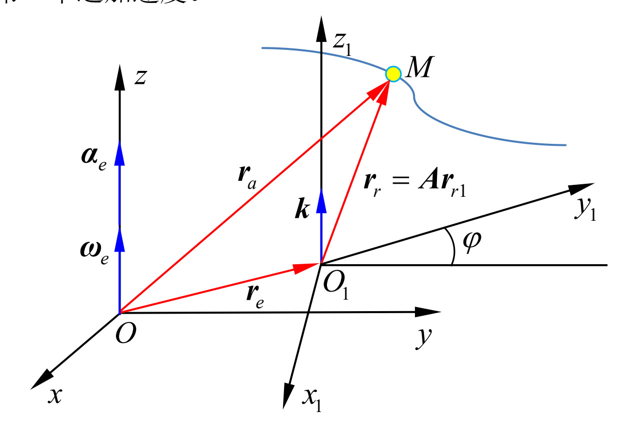


图 1 点的合成运动的矢量关系图

Fig. 1 Vector relationship diagram of the resultant motion of a particle

相对位移矢量为时间 t 的一阶导数

$$\boldsymbol{v}_{r1} = \frac{d\boldsymbol{r}_{r1}}{dt} = \dot{\boldsymbol{r}}_{r1} \tag{6}$$

为第一相对速度。相对矢量对时间 t 的二阶导数

$$\boldsymbol{a}_{r1} = \frac{d^2\boldsymbol{r}_{r1}}{dt} = \ddot{\boldsymbol{r}}_{r1} = \dot{\boldsymbol{v}}_{r1} \tag{7}$$

为第一相对加速度。

动系相对静系的转动的角度φ，即

$$\varphi = \varphi(t) \tag{8}$$

为牵连运动转角。

将转角 φ 对时间 t 的一阶导数

$$\boldsymbol{\omega}_e = \omega_e\boldsymbol{k} = \frac{d\varphi}{dt}\boldsymbol{k} = \dot{\varphi}\boldsymbol{k} \tag{9}$$

为动系转动的角速度矢量。

将转角 φ 对时间 t 的二阶导数

$$\boldsymbol{\alpha}_e = \alpha_e\boldsymbol{k} = \frac{d\omega_e}{dt}\boldsymbol{k} = \dot{\omega}_e\boldsymbol{k} = \ddot{\varphi}\boldsymbol{k} \tag{10}$$

为动系的转动的角加速度矢量。

设转动变换矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi & 0\\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \tag{11}$$

代表绕 z 轴转动的变换矩阵。

将转动矩阵 A 对夹角φ一阶导数，得到

$$\boldsymbol{A}'=\frac{d\boldsymbol{A}}{d\varphi}=\begin{pmatrix}-\sin\varphi & -\cos\varphi & 0\\ \cos\varphi & -\sin\varphi & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \tag{12}$$

为切向旋转矩阵。将转动矩阵 A 对夹角φ二阶导数，得到

$$\boldsymbol{A}''=\frac{d^2\boldsymbol{A}}{d\varphi^2}=\begin{pmatrix}-\cos\varphi & \sin\varphi & 0\\ -\sin\varphi & -\cos\varphi & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \tag{13}$$

为法向旋转变换矩阵。

本节基于选择变换矩阵，给出了绝对位移、牵连位移、选择矩阵及相对位移的解析关系式，给出绝对速度、相对速度及牵连速度的定义，得到绝对加速度、相对加速度及牵连加速度的定义，还得到旋转角度、角速度及旋转加速度的定义。

2 点的速度合成定理的证明

根据速度的定义，动点 M 的绝对速度矢量为

$$\frac{d\boldsymbol{r}_a}{dt}=\frac{d\boldsymbol{r}_e}{dt}+\frac{d\left(\boldsymbol{A}\boldsymbol{r}_{r1}\right)}{dt} \tag{14}$$

将方程(14)右边的第二项，展开得到

$$\frac{d\left(\boldsymbol{A}\boldsymbol{r}_r\right)}{dt}=\boldsymbol{A}'\omega_e\boldsymbol{r}_{r1}+\boldsymbol{A}\dot{\boldsymbol{r}}_{r1} \tag{15}$$

从式(15)得到牵连运动为定轴转动时的第二牵连加速度为

$$\boldsymbol{v}_{e2}=\boldsymbol{A}'\omega_e\boldsymbol{r}_{r1} \tag{16}$$

所以，得到总的牵连加速度为

$$\boldsymbol{v}_e=\boldsymbol{v}_{e1}+\boldsymbol{v}_{e2} \tag{17}$$

从方程(17)中可以看出，牵连加速度包括两个部分，第一部分牵连加速度$\boldsymbol{v}_{e1}$来自于动系坐标原点的平移运动，第二部分牵连加速度$\boldsymbol{v}_{e2}$来自于动系的转动运动，牵连速度几何关系如图 2(a)所示。

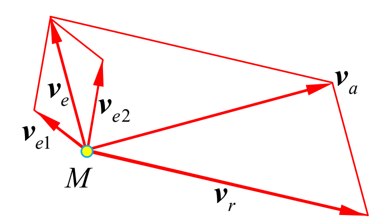
综合分析得到相对速度

$$\boldsymbol{v}_r=A\dot{\boldsymbol{r}}_{r1}=A\boldsymbol{v}_{r1} \tag{18}$$

联立方程(14)-方程(18)，得到牵连运动为平面运动的点的速度合成定理为

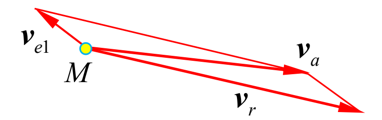
$$\boldsymbol{v}_a=\boldsymbol{v}_{e1}+\boldsymbol{v}_{e2}+\boldsymbol{v}_r \tag{19}$$

式中，绝对速度大小为$|\boldsymbol{v}_a|$，方向为沿$\boldsymbol{v}_a$。第一牵连速度大小为$|\boldsymbol{v}_{e1}|$，方向为沿$\boldsymbol{v}_{e1}$。第二牵连速度大小为$\omega_e \cdot MO_1$，方向为垂直于相对位移$\boldsymbol{r}_r$方向。相对速度的大小为$|\boldsymbol{v}_r|$，方向与第一相对速度夹角为$\varphi = \angle(\boldsymbol{v}_r, \boldsymbol{v}_{r1})$。 牵连运动为平面运动时的点的速度合成定理(19)的几何关系如图 2(a)所示。



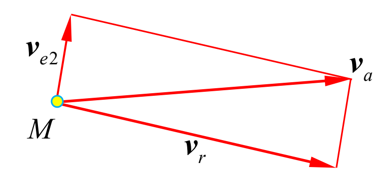
(a) 牵连运动为平面运动点的速度合成(19)几何关系

(a) The geometrical relationship diagram of the theorem of composition of velocity of a particle (19) in reference frame of plane motion



(b) 牵连运动为平行移动的点的速度(22)合成几何关系

(b) The geometrical relationship diagram of the theorem of composition of velocity of a particle (22) in transport reference frame



(c)牵连运动为定轴转动的点的速度合成(25)几何关系

(c) The geometrical relationship diagram of the theorem of composition of velocity of a particle (25) in the reference frame rotating about a fixed-axis

图 2 点的速度合成几何关系

Fig. 2 The geometric relationship of the theorem of composition velocity of a particle

下面，我们分两种情况讨论点的速度合成定理(19)。当牵连运动为平行移动时，对应的转角φ为常数，即

$$\varphi = \text{const} \tag{20}$$

此时的第二牵连速度$\boldsymbol{v}_{e2}$等于零，即

$$\boldsymbol{v}_{e2} = 0 \tag{21}$$

与此同时，点的合成运动速度定理(19)退化为

$$\boldsymbol{v}_a = \boldsymbol{v}_{e1} + \boldsymbol{v}_r \tag{22}$$

所以，方程(22)为牵连运动为平行移动的点的速度合成定理，其几何关系式如图 2(b)所示。

当牵连运动为定轴转动时，对应的牵连矢径$\boldsymbol{r}_e$为常数，即

$$\boldsymbol{r}_e = \text{const} \tag{23}$$

此时的第一牵连速度 $\boldsymbol{v}_{e1}$ 为零，即为

$$\boldsymbol{v}_{e1} = 0 \tag{24}$$

由于角速度不为零，所以第二牵连速度不为零。从而，容易得出速度合成定理(19)的另一种退化情况为

$$\boldsymbol{v}_a = \boldsymbol{v}_{e2} + \boldsymbol{v}_r \tag{25}$$

所以，方程(25)为牵连运动为定轴转动的点的速度合成定理，几何关系图如图 2(c)所示。将点的合成速度定理(19)，与教材[1]中定理的证明过程做对比，可以发现，本文得到的公式(11)可以清楚的展示牵连速度的本质来源，而且在推导定理的过程中也没有引入相对导数的概念。推导过程的从数学的角度来看，显得十分流畅与自然。

3 点的加速度合成定理的证明

根据加速度的定义，动点 M 的绝对速度为

$$\frac{d^2\boldsymbol{r}_a}{dt^2} = \frac{d^2\boldsymbol{r}_e}{d^2t} + \frac{d^2\left(\boldsymbol{A}\boldsymbol{r}_{r1}\right)}{dt^2} \tag{26}$$

将方程(26)的等号右边的第二项展开，计算得到

$$\frac{d^2\left(\boldsymbol{A}\boldsymbol{r}_{r1}\right)}{dt^2} = \frac{d\left(\boldsymbol{A}'\dot{\varphi}\boldsymbol{r}_{r1}\right)}{dt} + \frac{d\left(\boldsymbol{A}\dot{\boldsymbol{r}}_{r1}\right)}{dt} \tag{27}$$

其中由牵连速度对时间求一阶导数，得到的加速度为

$$\frac{d\left(\boldsymbol{A}'\dot{\varphi}\boldsymbol{r}_{r1}\right)}{dt} = \boldsymbol{a}_{e2} + \boldsymbol{a}_{e3} + \boldsymbol{a}_{C1} \tag{28}$$

其中，$\boldsymbol{a}_{e2} = \boldsymbol{A}''\omega_e^2\boldsymbol{r}_{r1}$ 为由牵连运动为转动时导致的法向第二牵连加速度，$\boldsymbol{a}_{e3} = \boldsymbol{A}'\alpha_e\boldsymbol{r}_{r1}$ 为由牵连运动为转动时导致的切向第三牵连加速度，$\boldsymbol{a}_{C1} = \boldsymbol{A}'\omega_e\dot{\boldsymbol{r}}_{r1}$ 为由牵连运动产生第一科氏加速度。

由相对运动度对时间求一阶导数，得到的加速度为

$$\frac{d\left(\boldsymbol{A}\dot{\boldsymbol{r}}_{r1}\right)}{dt} = \boldsymbol{A}'\omega_e\dot{\boldsymbol{r}}_{r1} + \boldsymbol{A}\ddot{\boldsymbol{r}}_{r1} = \boldsymbol{a}_{C2} + \boldsymbol{a}_r \tag{29}$$

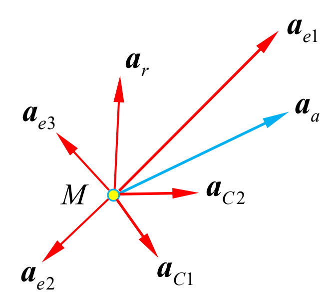
其中，$\boldsymbol{a}_{C1} = \boldsymbol{A}'\omega_e\dot{\boldsymbol{r}}_{r1}$ 为由相对运动产生的第二科氏加速度，$\boldsymbol{a}_r = \ddot{\boldsymbol{r}}_{r1}$ 为相对加速度。

联立式(26) ~式(28)，得到牵连运动为平面运动时的点的加速度合成定理，即

$$\boldsymbol{a}_a = \boldsymbol{a}_{e1} + \boldsymbol{a}_{e2} + \boldsymbol{a}_{e3} + \boldsymbol{a}_r + \boldsymbol{a}_{C1} + \boldsymbol{a}_{C2} = \boldsymbol{a}_e + \boldsymbol{a}_r + \boldsymbol{a}_C \tag{30}$$

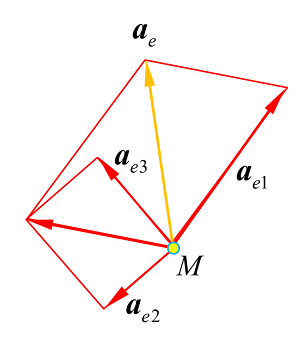
式中，绝对加速度 $\boldsymbol{a}_a$ 大小为 $|\boldsymbol{a}_a|$，方向为沿 $\boldsymbol{a}_a$。第一牵连加速度 $\boldsymbol{a}_{e1}$ 大小为 $|\boldsymbol{a}_{e1}|$，方向为沿 $\boldsymbol{a}_{e1}$。第二牵连加速度 $\boldsymbol{a}_{e2}$ 大小为 $\omega_e^2 \cdot MO_1$，方向为垂直于相对位移 $\boldsymbol{r}_r$ 方向。 第三牵连加速度 $\boldsymbol{a}_{e3}$ 大小为 $\alpha_e \cdot MO_1$，方向为反向于相对位移 $\boldsymbol{r}_r$ 方向。 相对加速度 $\boldsymbol{a}_r$ 的大小为 $|\boldsymbol{a}_r|$，方向沿 $\boldsymbol{a}_r$。科氏加速度的大小为 $\omega_e v_r \sin\angle(\boldsymbol{\omega}_e, \boldsymbol{v}_r)$，方向为垂直由 $\boldsymbol{\omega}_e$ 和 $\boldsymbol{v}_r$ 确定的平面。图 3(a)给出点的加速度合成定理(30)的几何关系

图。



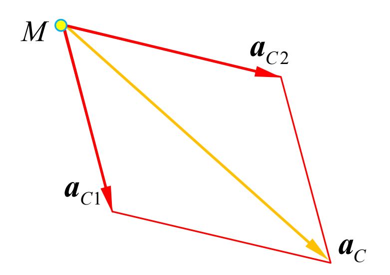
(a) 牵连运动平面运动的点的加速度合成方程(30)几何关系图

(a) The geometrical relationship of the theorem of composition of acceleration of a particle (30) in reference frame of plane motion



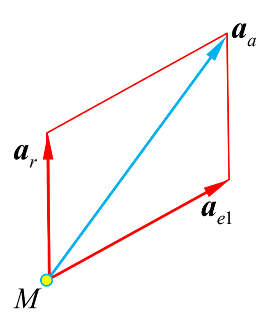
(b) 牵连加速度(31)合成几何关系图

(b) Geometric relationship diagram for the transport acceleration (31)



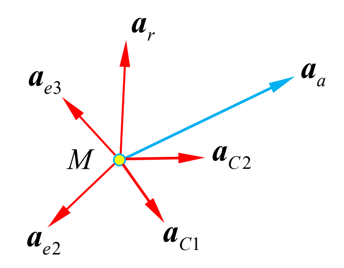
(c) 科氏加速度(32)合成几何关系图

(c) The geometric relationship diagram of Coriolis acceleration (32)



(d) 牵连运动为平移的点的加速度(35)合成几何关系图

(d) The geometrical relationship diagram of the theorem of composition of acceleration of a particle (35) in transport reference frame



(e) 牵连运动为转动的点的加速度(38)合成几何关系图

(e) The geometrical relationship diagram of the theorem of composition of acceleration of a particle (38) in the reference frame rotating about a fixed-axis

图 3 点的加速度合成定理关系关系图

Fig. 3 The geometric relationship diagram of the theorem of composition acceleration of a particle

总牵连加速度

$$\boldsymbol{a}_e = \boldsymbol{a}_{e1} + \boldsymbol{a}_{e2} + \boldsymbol{a}_{e3} \tag{31}$$

对应的，图 3(b)给出了牵连加速度公式(31)的几何关系图。

总的科氏加速度为

$$\boldsymbol{a}_C = \boldsymbol{a}_{C1} + \boldsymbol{a}_{C2} \tag{32}$$

图 3(c)给出了科式加速度公式(32)的几何关系图。

对加速度合成定理(30)分情况讨论。第一种情况为牵连运动为平移时，即当牵连运动为平移时，对应的转角 φ 为常数

$$\varphi = \text{const} \tag{33}$$

所以，得到牵连角速度和角加速度均为零

$$\begin{cases} \omega_e = 0 \\ \alpha_e = 0 \end{cases} \tag{34}$$

将方程(34)代入(28)对应的，此时的第二牵连加速度 $\boldsymbol{a}_{e2} = 0$，第三牵连加速度 $\boldsymbol{a}_{e3} = 0$，第一科氏加速度 $\boldsymbol{a}_{C1} = 0$ 均消失了。将方程(34)代入(29)对应的，第二科氏加速度 $\boldsymbol{a}_{C1} = 0$ 均消失了。

综上分析，得到牵连运动为平移的点的加速度合成定理变为

$$\boldsymbol{a}_a = \boldsymbol{a}_{e1} + \boldsymbol{a}_r \tag{35}$$

在方程(31)中，第一牵连加速度 $\boldsymbol{a}_{e1}$ 由动系相对于静系的的平移运动导致的，相对加速度 $\boldsymbol{a}_r$ 由动点相对与动系的运动产生的，其余的加速度项则退化为零。虽然加速度定理公式(30)与教材[1]中定理表达式是相同的，但是，本文的公式可以更清晰的揭示牵连加速度的来源，更容易理解。如图 3(d)所示，给出加速度合成定理的几何关系图。

当牵连运动为定轴转动时，对应的牵连矢径 $\boldsymbol{r}_e$ 为常数，即

$$\boldsymbol{r}_e = \text{const} \tag{36}$$

此时的第一牵连加速度为零，即为

$$\boldsymbol{a}_{e1}=0 \tag{37}$$

将式(37)代入点的加速度合成定理(30)，得到牵连运动为转动的加速度合成定理为

$$\boldsymbol{a}_a=\boldsymbol{a}_{e2}+\boldsymbol{a}_{e3}+\boldsymbol{a}_{C1}+\boldsymbol{a}_{C2}+\boldsymbol{a}_r=\boldsymbol{a}_e+\boldsymbol{a}_r+\boldsymbol{a}_C \tag{38}$$

需要指出的是：方程(34)中的牵连加速$\boldsymbol{a}_{e2}$和$\boldsymbol{a}_{e3}$均来自于牵连运动的定轴转动，第一科氏加速度$\boldsymbol{a}_{C1}$部分来源于牵连运动，而第二科氏加速度$\boldsymbol{a}_{C2}$来源于相对运动。图3(e)展示了牵连运动为转动的加速度合成定理的几何关系图。将定理(38)与教材[1]的内容进行对比发现：本文的表达式可以明确的说明牵连加速度、相对加速度及科氏加速度的来源。

4 结论

本文给出一种基于变换矩阵$\boldsymbol{A}$的点的合成的速度和加速度合成定理证明方法，获得了以下主要结论：(1)区别于教材的矢量关系证明，本文的引入转动变换矩阵$\boldsymbol{A}$可以清晰揭示牵连速度、相对速度本质来源。同时，转动变换矩阵$\boldsymbol{A}$也能够揭示了牵连速加速度、相对加速度及科氏加速度的本质来源。(2)在加速度的证明过程中，不需区分牵连运动是平行移动还是定轴转动，体现了本文方法的处理加速度问题的统一性。(3)本文的推导方法具有数学推理清理明了、物理意义明确直观、思维逻辑清晰流畅等优点，拨去笼罩在理论力学的点的合成运动教学中乌云，厘清了速度与加速合成定理的证明的玄机之处，这对于理解、掌握及应用运动学都是有利的。

参考文献

1. 哈工大理论力学教研室. 理论力学(I), 第8版. 北京：高等教育出版社, 2016
2. 洪嘉振, 刘铸永, 杨长俊. 理论力学, 第4版. 北京：高等教育出版社, 2015
3. 刘延柱, 朱本华, 杨海兴. 理论力学. 第3版. 北京：高等教育出版社，2010
4. 费学博. 理论力学, 第5版. 北京：高等教育出版社，2019
5. 孙毅, 陈立群. 运动学中点的合成运动分析方法. 力学与实践, 2023, 45: 881-885
   Sun Yi, Chen Liqun. Analytical method of the motion composition for moving points. Mechanics in Engineering, 2023, 45: 881-885 (in Chinese)
6. 张劲夫. 点的速度和加速度合成定理的简便证明. 力学与实践, 2023, 45: 916-919.
   Zhang Jinfu. Simple proof of velocity and acceleration synthesis theorems for a moving point. Mechanics in Engineering, 2023, 45: 916-919 (in Chinese)
7. 于红军, 孙毅, 陈立群. 基于“金属丝+小环”案例的点的合成运动分析方法. 力学与实践, 2023, 45: 1-4
   Yu Hongjun, Sun Yi, Chen Liqun. Analytical method of the motion composition for a moving point via the case of “wire + small ring”. Mechanics in Engineering, 2023, 45: 1-4 (in Chinese)
8. 高宗战, 刘伟, 高行山等. 动点的牵连运动分析与运动合成定理推证. 力学与实践, 2022, 44: 159-162
   Gao Zongzhan, Liu Wei, Gao Hangshan, et al. Analysis on the transport motion and proof of the composition theorem for moving points. Mechanics in Engineering, 2022, 44(1): 159-162 (in Chinese)
9. 梅凤翔. 关于科氏加速度与科氏力——理论力学札记之十一. 力学与实践, 2018, 40: 314-315
   Mei Fengxiang. On the coriolis acceleration and coriolis inertial force. Mechanics in Engineering, 2018, 40: 314-315 (in Chinese)
10. 王维, 丁俊, 杨建波. 将“耦合位移”引入速度合成定理的几何法推导. 力学与实践, 2016, 38: 591
    Wang Wei, Ding Jun, Yang Jianbo. The “coupling displacement” is introduced into the geometric derivation of the velocity

synthesis theorem. Mechanics in Engineering, 2016, 38: 591 (in Chinese)

11. 胡浩, 欧丽, 唐雪松. 推导加速度合成公式的“牵连点跟踪法”. 力学与实践, 2012, 34: 66-68
Hu Hao, Ou Li, Tang Xuesong. The “implicated point tracking method” for derivation of acceleration synthesis formula. Mechanics in Engineering, 2012, 34: 66-68 (in Chinese)
12. 王斌耀, 徐鉴. 关于点的合成运动速度合成定理两种推导的辨析. 力学与实践, 2007, 29: 64-66
Wang Binyao, Xu Jian. Analysis of two derivations of synthesis theorems about the synthetic motion velocity of points. Mechanics in Engineering, 2007, 29: 64-66 (in Chinese)
13. 杜茂林，谈志高. 运动学中的矩阵方法. 力学与实践, 2005, 27: 69-70
Du Maolin, Tan Zhigao. Matrix methods in kinematics. Mechanics in Engineering, 2005, 27: 69-70 (in Chinese)
14. 琚贻宏,李晓玲.用复矢量法研究平面机构的运动.力学与实践, 1999, 21: 31-34
Ju Yihong, Li Xiaoling. Research on the motion of planar mechanisms using complex vector method. Mechanics in Engineering, 1999, 21:31-34 (in Chinese)
15. 黄子健.一组解点的复合运动的矩阵公式.力学与实践, 1983, 5 :36-38
Huang Zijian. Matrix formula for compound motion of a set of solution points. Mechanics in Engineering, 1983, 6: 36-38 (in Chinese)